

Die Leistungsgrenze thermischer Strahlungsinstrumente

Bemerkung zu der gleichnamigen Arbeit von W. Dahlke und G. Hettner¹

Von EUGEN KAPPLER

Aus dem Physikalischen Institut der Universität München

(Z. Naturforschg. 1, 560—564 [1946]; eingegangen am 22. Juni 1946)

Dahlke und Hettner haben gezeigt, daß die Grenzempfindlichkeit des Bolometers durch seine spontanen Temperaturschwankungen bedingt ist. Ihre Überlegungen führen zu dem Begriff einer sogenannten optimalen Leistungsfähigkeit, für welche sie den Wert $L = 1/T \sqrt{2k\lambda}$ finden (λ = Wärmeabgabevermögen). Die Formel gilt für den Fall, daß die Meßzeit von der Größenordnung der Einstellzeit des Bolometers ist.

Eine Nachprüfung der Überlegungen ergab, daß die Bestimmung des mittleren Fehlers infolge der spontanen Schwankungen nicht korrekt durchgeführt worden ist, was zu einem unrichtigen Ausdruck für die Leistungsfähigkeit führte. Wir erhalten dafür den Ausdruck $L = 1/T \sqrt{2kC}$ (C = Wärmekapazität). Zur Erzielung einer möglichst großen Leistungsfähigkeit ist also bei der Konstruktion eines Bolometers nicht auf das Wärmeabgabevermögen zu achten, sondern seine Wärmekapazität ist möglichst klein zu halten.

Für die spontanen Temperaturschwankungen des Bolometers wird die für thermisches Gleichgewicht geltende Schwankungsformel benutzt, was streng genommen nicht zulässig ist. Solange die Übertemperatur des Bolometers klein ist, verglichen mit der Temperatur seiner Umgebung, dürfte der dadurch bedingte Fehler von untergeordneter Bedeutung sein.

Infolge der Brown'schen Molekularbewegung existiert für alle Meßinstrumente mit Direktionskraft eine Grenze der Meßgenauigkeit. Das Instrument führt eine Nullpunktsbewegung aus, deren potentielle Energie im Mittel gleich $kT/2$ ist:

$$D \bar{x}^2 / 2 = k T / 2.$$

D = Direktionskraft, \bar{x}^2 = mittleres Schwankungsquadrat, k = Boltzmann-Konstante, T = absolute Temperatur.

Die Messung besteht darin, daß während der Meßzeit dem Instrument durch den Meßvorgang eine gewisse Energie zur Verfügung gestellt wird, die aber im allgemeinen nur zu einem gewissen Bruchteil η in potentielle Energie des Instrumentes umgesetzt wird. η heißt der Nutzeffekt des Instrumentes². Diese in Ausschlagsarbeit des Instrumentes umgesetzte Energie muß offenbar $> kT/2$ sein, damit ein beobachtbarer, d. h. von den spontanen Schwankungen unterscheidbarer Ausschlag des Instrumentes entsteht.

Bei den Strahlungsempfängern sind zwei Gruppen von Instrumenten zu unterscheiden:

¹ Z. Physik 117, 74 [1941].

² M. Czerny, Ann. Physik (5) 12, 993 [1932].

1. Solche Empfänger, bei denen ein bestimmter Bruchteil der absorbierten Strahlungsenergie unmittelbar in Ausschlagsarbeit des Meßinstrumentes (z. B. des Galvanometers) umgesetzt wird. Sie stellen im Prinzip Wärmekraftmaschinen dar. Die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit ist theoretisch geklärt². Der größtmögliche Nutzeffekt ist $\eta_{\max} = \Delta T / T$ (ΔT ist die durch Absorption der zu messenden Strahlung entstehende Temperaturerhöhung gegenüber der Temperatur T der Umgebung). Er ist bei diesen Instrumenten außerordentlich klein und geht mit abnehmender Intensität der zu messenden Strahlung gegen Null. Beispiele sind das Thermoelement und das Radiometer. Offenbar ist die natürliche Empfindlichkeitsgrenze dadurch gegeben, daß man für ΔT die spontanen Temperaturschwankungen τ_0 des im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindlichen Strahlungsempfängers setzt, d. h.

$$\Delta T = \tau_0 = T \sqrt{k/C} \quad (C = \text{Wärmekapazität}). \quad (1)$$

2. Das Bolometer. Hier wird die Energie zur Ablenkung des beweglichen Meßinstrumentes von der Hilfsstromquelle geliefert. Die Untersuchung von Dahlke und Hettner sowie die folgenden



Überlegungen sind der Frage nach der natürlichen Grenzempfindlichkeit des Bolometers gewidmet.

Wie Dahlke und Hettner erkannt haben, sind beim Bolometer zwei Fälle zu unterscheiden:

- Die Schwankungen des beweglichen Meßinstrumentes (z. B. des Galvanometers) infolge der Brownschen Bewegung sind größer als diejenigen Schwankungen, welche durch die spontanen Temperaturschwankungen des Bolometers verursacht werden.
- Die Brownsche Bewegung des Meßinstrumentes ist, verglichen mit den durch die spontanen Temperaturschwankungen des Bolometers hervorgerufenen Schwankungen, zu vernachlässigen.

Die besonderen Verhältnisse des Bolometers kommen lediglich im Fall b) zur Geltung, so daß wir uns auf ihn beschränken können.

Dahlke und Hettner definieren folgendermaßen eine optimale Leistungsfähigkeit L eines Strahlungsempfängers: Da offenbar die Leistungsfähigkeit um so größer ist, je größer der Meßausschlag pro Einheit der während der Meßdauer t_M dem Instrument zugeführten Energie, verglichen mit dem Schwankungsausschlag, ist, so ist, wenn wir mit S den Energiestrom, mit $E = St_M$ also die während der Meßzeit zugeführte Energie bezeichnen, nach Dahlke und Hettner:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{E} \frac{\text{Meßausschlag } \sqrt{t_M}}{\text{Schwankungsausschlag}} \\ &= \frac{1}{S} \frac{\text{Meßausschlag}}{\text{Schwankungsausschlag } \sqrt{t_M}} \end{aligned} \quad (2)$$

Für das Bolometer erhält man im Fall b) für L , wenn man das Wärmeabgabevermögen mit λ , seine Einstellzeit mit $t_0 = C/\lambda$ bezeichnet:

$$L = \frac{1}{TV\sqrt{2k\lambda}} \sqrt{\frac{1 - e^{-t_M/t_0}}{t_M/t_0}} \quad (2a)$$

Liegt die Meßzeit t_M in der Gegend von t_0 , so wird $L \approx 1/TV\sqrt{2k\lambda}$. Es ergibt sich also für die Konstruktion eines Bolometers die Vorschrift, lediglich sein Wärmeabgabevermögen möglichst klein zu machen.

Dieses etwas befremdliche Ergebnis veranlaßte uns, die Überlegungen von Dahlke und Hettner einer Nachprüfung zu unterziehen.

Zunächst ist nicht recht verständlich, warum in der Formel (2) für L die Meßzeit unter der Wurzel vorkommt. Dahlke und Hettner geben dafür folgende Begründung an: „Es ist sinngemäß, die Meßdauer in dieser Weise zu berücksichtigen, weil der mittlere Fehler des Mittelwertes aus n Einzelmessungen \sqrt{n} -mal kleiner ist als der einer Einzelmessung, und die in gegebener Zeit mögliche Zahl von Messungen proportional t_M ist.“

Hierzu ist folgendes zu sagen: Eine entsprechend den physikalischen Gegebenheiten sinnvolle Definition einer optimalen Leistungsfähigkeit kann nur so lauten:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{E} \frac{\text{Meßausschlag}}{\text{Schwankungsausschlag}} \\ &= \frac{1}{St_M} \frac{\text{Meßausschlag}}{\text{Schwankungsausschlag}}, \end{aligned} \quad (3)$$

womit eben zum Ausdruck gebracht wird, daß dasjenige Instrument das leistungsfähigere ist, das pro Einheit der während der Meßdauer zur Verfügung gestellten Energie den größeren Meßausschlag liefert, verglichen mit den spontanen Schwankungen. Dabei ist freilich zu beachten, daß die Leistungsfähigkeit noch von dem Beobachtungsverfahren und der Meßzeit abhängig sein wird insofern, als der Wert, der für den Schwankungsausschlag in die Formel (3) einzusetzen ist, implizite von dem Beobachtungsverfahren und der Meßdauer abhängen wird. Wir können es z. B. bei Ablesung des Meßinstrumentes zu Beginn und am Ende der Meßzeit so einrichten, daß der in (3) einzusetzende Wert für den mittleren Schwankungsausschlag beliebig klein wird, nämlich dadurch, daß wir die Meßdauer beliebig klein machen. Denn das Instrument kann sich wegen seiner Trägheit in einer kurzen Zeit auch nur wenig von seiner Ausgangsstellung entfernen.

Wir werden zwei verschiedene Beobachtungsverfahren behandeln: I. Es wird zu Beginn und am Ende der Meßzeit die Stellung des Instrumentes abgelesen. II. Der gesamte Verlauf des Instrumentes während der Meßzeit wird registriert, und durch Mittelung über die Registrierkurve wird der mittlere Fehler der Null-Lage des Systems ermittelt (kontinuierliche Beobachtung). Beim zweiten Verfahren wird die Leistungsfähigkeit größer sein als beim ersten, da der mittlere Fehler kleiner ist. Offenbar dachten Dahlke und Hettner bei ihren Betrachtungen an den zweiten Fall. Es ist aber in diesem Falle keineswegs

zulässig, so wie in Formel (2) geschehen, als Schwankungsausschlag einen Wert einzusetzen, der $\sqrt{t_M}$ -mal kleiner ist als der Schwankungsausschlag bei der Einzelablesung. Denn es handelt sich hier um ein Problem der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung. Die Schwankungswerte, die das Instrument nacheinander annimmt innerhalb von Zeiten, die in der Größenordnung von t_0 liegen, sind wegen der Trägheit des Instrumentes voneinander abhängig. Wie der Verf.³ gezeigt hat, gilt in solchen Fällen ein anderes Fehlergesetz als das Vn -Gesetz. Letzteres gilt nur für voneinander unabhängige Beobachtungen, d. h. bei Ablesungen des Instrumentes, deren zeitliche Distanz, verglichen mit der Einstellzeit des Instrumentes, groß ist. In dem vorliegenden Falle handelt es sich aber um Meßzeiten, die größenmäßig gleich der Einstellzeit des Instrumentes sind.

Beobachtungsverfahren I.

Ableitung von Anfangs- und Endausschlag

Mit denselben Bezeichnungen, die Dahlke und Hettner verwenden, lautet die Differentialgleichung des Strahlungsempfängers:

$$C \dot{\vartheta} = S + q_s(t) - \lambda \vartheta.$$

Es bedeuten $\vartheta = T - T_0$ die Temperaturerhöhung des Bolometers gegenüber der Umgebung, C seine Wärmekapazität, λ sein Wärmeabgabevermögen; S ist die zu messende pro Sekunde zugeführte Strahlungsenergie, $q(t)$ die infolge der spontanen Temperaturschwankungen pro Sekunde zugeführte Energie.

Die Lösung der Differentialgleichung lautet, wenn wir die Einstellzeit $t_0 = C/\lambda$ einführen und ferner $q_s(t)/C = \varphi(t)$ setzen:

$$\vartheta = \vartheta_a e^{-t/t_0} + \frac{S}{\lambda} (1 - e^{-t/t_0}) + e^{-t/t_0} \int_0^t \varphi(t) e^{t/t_0} dt. \quad (4)$$

Dabei ist ϑ_a die Temperaturdifferenz des Bolometers zu Beginn der Messung ($t = 0$).

Wir wenden mit Dahlke und Hettner die Ornsteinsche⁴ Methode zur Bestimmung des

³ Ann. Physik (5) **31**, 619 [1938].

⁴ L. S. Ornstein, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. **21**, 96 [1917]; Z. Physik **41**, 848 [1927].

mittleren Schwankungsquadrates an, indem wir über die Funktion $\varphi(t)$ folgende Annahmen machen:

$$1. \overline{\varphi(t)} = 0.$$

2. Es soll der Mittelwert $\overline{\varphi(t) \cdot \varphi(t_1)}$ nur eine Funktion der Zeitdifferenz $t_2 - t_1 = u$ sein, d. h. $\overline{\varphi(t_2) \cdot \varphi(t_1)} = \psi(t_2 - t_1) = \psi(u)$.

3. $\psi(u)$ soll bei $u = 0$ ein sehr steiles Maximum haben und für $u \neq 0$ sehr schnell gegen Null gehen, d. h. eine Korrelation der φ -Werte soll nur für sehr kleine Zeitabstände bestehen.

Wir nennen $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) du = J$.

Unter den Voraussetzungen 1–3 folgt^{1, 4, 5}:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \varphi(t) dt \right)^2 &= J t, \\ \left(\int_0^t \varphi(t) e^{t/t_0} dt \right)^2 &= J \frac{t_0}{2} (e^{2t/t_0} - 1), \quad (5) \\ \int_0^t \varphi(t) dt \int_0^t \varphi(t) e^{t/t_0} dt &= J t_0 (e^{t/t_0} - 1). \end{aligned}$$

Den in (3) einzusetzenden Meßausschlag erhalten wir, wenn wir in (4) von den spontanen Temperaturschwankungen absehen ($\varphi = 0$, $\vartheta_a = 0$). Wir nennen ihn mit Dahlke und Hettner ϑ_0 :

$$\vartheta_0 = \frac{S}{\lambda} (1 - e^{-t/t_0}). \quad (6)$$

Den in (3) einzusetzenden Schwankungsausschlag erhalten wir, wenn wir den Empfänger ohne Bestrahlung zur Zeit 0 und zur Zeit t betrachten. Zur Zeit $t = 0$ beobachten wir den Wert ϑ_a , zur Zeit t den Wert ϑ . Für die Schwankungen von ϑ folgt also aus (4) mit $S = 0$:

$$\vartheta - \vartheta_a = \vartheta_a (e^{-t/t_0} - 1) + e^{-t/t_0} \int_0^t \varphi(t) e^{t/t_0} dt. \quad (7)$$

Unter Benutzung der Formel (5) folgt aus (7) für das mittlere Fehlerquadrat τ^2 von ϑ :

$$\tau^2 = (\vartheta - \vartheta_a)^2$$

$$= \vartheta_a^2 (e^{-t/t_0} - 1)^2 + \frac{J t_0}{2} (1 - e^{-2t/t_0}).$$

Da für $t \rightarrow \infty$ und $\vartheta_a = 0$ nach (1) $\tau^2 = \tau_0^2 = k T^2/C$ werden muß, so folgt für J :

⁵ E. Kappler, Ann. Physik (5) **31**, 377 [1938].

$$J = \frac{2 \tau_0^2}{t_0} = \frac{2}{t_0} \frac{k T^2}{C} .$$

Mitteln wir noch über alle möglichen Anfangsbedingungen ϑ_a , d. h. setzen wir:

$$\overline{\vartheta_a^2} = \tau_0^2 ,$$

so folgt $\tau^2 = 2 \tau_0^2 (1 - e^{-t/t_0})$. (8)

Damit folgt für die optimale Leistungsfähigkeit nach (3) aus (6) und (8)

$$L = \frac{1}{S t} \frac{\vartheta_0}{\tau} = \frac{1}{T V 2 k C} \frac{\sqrt{1 - e^{-t/t_0}}}{t/t_0}$$

$$= \frac{1}{T V 2 k C} f(t/t_0)$$

Für $t = t_0$ wird $f(t/t_0) \approx 1$, z. B. folgt für $t = t_0$ $f(t/t_0) = 0,8$.

Beobachtungsverfahren II. Kontinuierliche Beobachtung

Der Temperaturverlauf des Bolometers wird registriert. Aus (4) ergibt sich ohne Bestrahlung ($S = 0$) als Mittelwert von ϑ während der Zeit t , wenn zur Zeit $t = 0$ $\vartheta = \vartheta_a$ war:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}^t &= \frac{1}{t} \int_0^t \vartheta dt \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \vartheta_a \int_0^t e^{-t/t_0} dt + \int_0^t e^{-t/t_0} \int_0^t \varphi(\xi) e^{\xi/t_0} d\xi dt \right\} \\ &= \frac{1}{t} \left\{ -t_0 \vartheta_a (e^{-t/t_0} - 1) \right. \\ &\quad \left. + t_0 \int_0^t \varphi(t) dt - t_0 e^{-t/t_0} \int_0^t \varphi(t) e^{t/t_0} dt \right\}. \end{aligned}$$

Für das mittlere Fehlerquadrat von ϑ folgt hieraus unter Berücksichtigung von (5)*:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \overline{(\bar{\vartheta}^t)^2} = 2 \tau_0^2 \frac{t_0}{t} - \tau_0^2 \frac{t_0^2}{t^2} \\ &\quad \left\{ 3 + e^{-2t/t_0} - 4 e^{-t/t_0} - \frac{\vartheta_a^2}{\tau_0^2} (e^{-t/t_0} - 1)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Mitteln wir noch über alle möglichen Anfangswerte ϑ_a mit $\overline{\vartheta_a^2} = \tau_0^2$, so folgt

* Bei Bestrahlung des Empfängers hat man zur Ermittlung des mittleren Fehlerquadrats τ^2 die Registrierkurve in der Weise umzuzeichnen, daß für jeden Zeitpunkt von dem beobachteten Wert von ϑ der durch (6) dargestellte systematische Verlauf abgezogen wird.

Damit wird L nach (3), (6) und (9):

$$L = \frac{1}{T V 2 k C} f'(t/t_0)$$

$$\text{mit } f'(t/t_0) = \frac{1 - e^{-t/t_0}}{t/t_0 \sqrt{2 \left\{ \frac{t_0}{t} + \frac{t_0^2}{t^2} (e^{-t/t_0} - 1) \right\}}}.$$

Für $t \approx t_0$ wird f' ebenfalls ungefähr gleich 1, z. B. ergibt sich für $t = t_0$ $f'(t/t_0) = 1,05$, so daß wir in diesem Falle wieder

$$L \approx \frac{1}{T V 2 k} \quad \text{setzen können.}$$

Die kontinuierliche Beobachtung bringt deswegen keine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit mit sich, verglichen mit dem bedeutend einfacheren Verfahren I, da, wie schon erwähnt, zwischen den vom Empfänger nacheinander eingenommenen Temperaturen eine Korrelation besteht, die sich auf Zeiten von der Größenordnung der Einstellzeit erstreckt.

Die konsequente Durchführung der Überlegungen von Dahlke und Hettner führt also zu einem wesentlich anderen Ergebnis. Es kommt für die Leistungsfähigkeit des Bolometers nicht auf sein Wärmeabgabevermögen an, sondern auf seine Wärmekapazität, welche möglichst klein zu halten ist.

In diesem Zusammenhang verdienen die Untersuchungen von L. Bewilogua⁶ erwähnt zu werden, der wohl in einem instinktiv richtigen Gefühl mit Erfolg versucht, die Abnahme der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen zu einer Empfindlichkeitssteigerung von Strahlungsempfängern auszunützen. Seine Untersuchungen erscheinen nunmehr in einem ganz anderen und wesentlich günstigeren Lichte. Während nach der Formel von Dahlke und Hettner beim Übergang von Zimmertemperatur (293° abs.) auf die tiefere Temperatur T eine Leistungssteigerung V_{opt} zu erwarten ist vom Betrag

$$V_{\text{opt}} = \frac{L_T}{L_{293}} = \frac{293}{T} \sqrt{\frac{\lambda_{293}}{\lambda_T}},$$

beträgt diese optimale Leistungssteigerung nach unseren Überlegungen

⁶ Reichsber. Physik 1, 23 [1944].

$$V'_{\text{opt}} = \frac{293}{T} \sqrt{\frac{C_{293}}{C_T}}$$

Nach den Angaben von Bewilogua erhält man z. B. für Konstanten und $T = 10^0$ abs. $\lambda_{293}/\lambda_{10} \sim 10$ und $C_{293}/C_{10} = 526$, d. h. $V'_{\text{opt}} = 600$ gegenüber 100 nach der Formel von Dahlke und Hettner.

Zum Schluß sei noch auf ein Bedenken hingewiesen, das gegen die Überlegungen von Dahlke und Hettner vorzuführen ist. Es wurde für die spontanen Temperaturschwankungen des Strah-

lungsempfängers der Wert (1) angesetzt, der aber nur für den Fall des thermischen Gleichgewichtes gültig ist. Bei den Strahlungsempfängern handelt es sich aber nicht um ein thermisches Gleichgewicht, sondern um einen stationären Strömungszustand. Wir vermuten, daß in diesen Fällen gar keine der Formel (1) entsprechende allgemein gültige Formel angegeben werden kann, sondern daß die spontanen Temperaturschwankungen von dem speziellen Mechanismus des Wärmetransports (z. B. Wärmeleitung oder Wärmestrahlung) abhängig sein werden.

Präzisionsvergleich von Gitterkonstanten mittels Fraunhofer-Anordnung¹

Von GOTTFRIED MÖLLENSTEDT

(Z. Naturforschg. 1, 564—566 [1946]; aus Heidenheim, Württemberg, eingegangen am 12. Dez. 1945)

Um höchste Präzision beim Vergleich von Gitterkonstanten mittels Elektroneninterferenzen zu ermöglichen, werden Eichsubstanz und Prüfsubstanz nebeneinander in einem etwa 1 mm breiten Fraunhofer-Bündel aufgestellt. Das neue Verfahren beseitigt frühere Mängel, insbesondere Überlagerungsstörungen, und erzielt eine Genauigkeit von mindestens 1%.

Zum Vergleich von Gitterkonstanten mittels Elektroneninterferenzen stellt man meist zwei polykristalline Folien dicht hintereinander auf und durchstrahlt sie mit einem feinausgeblendeten parallelen Elektronenstrahl von etwa 0,1 mm im Durchmesser. Der Vergleich der Gitterkonstanten wird durch Ausmessung der oft nicht ganz leicht auseinander zu haltenden Debye-Scherrer-Ringe vorgenommen. Zur Erreichung einer Meßgenauigkeit von 1% ist dieses Verfahren wegen der gegenseitigen Beeinflussung der Ringe ungeeignet². Auch die wegen des scharfen Punktsystems als besonders geeignet erscheinende Verwendung eines Einkristalls ist bisher für Präzisionsmessungen aus folgenden Gründen nicht zum Erfolg gekommen.

Erstens: Durchschießt der Elektronenstrahl zuerst den Einkristall, z. B. eine Glimmerfolie, und dann das polykristalline Präparat, so wirken die abgebeugten Interferenzstrahlen als neue Primärstrahlen und erzeugen bei Durchtritt durch die polykristalline Folie jeder für sich ein neues De-

beye-Scherrer-System. Alle diese überlagern sich auf der registrierenden Platte und mindern damit sowohl die Meßgenauigkeit wie die Übersichtlichkeit der Reflexe herab.

Zweitens: Durchstrahlen die Elektronen zuerst die polykristalline Folie und dann das Glimmerpräparat, so erzeugt die vorgeschaltete Folie ein divergentes Bündel, was die Entstehung von Kikuchi-Linien zur Folge hat und somit wieder die Meßgenauigkeit und die Einfachheit der Diagramme herabsetzt.

Es läßt sich nun zeigen, daß sich diese Schwierigkeiten durch Anwendung des erstmalig von A. A. Lebedeff³ zur Erzeugung lichtstarker Elektroneninterferenzen benutzten Fraunhofer-schen Strahlengangs auf einfachste Weise überwinden lassen. Im Gegensatz zu der bisher üblichen Feinausblendung (0,1 mm) durchsetzt hier der Strahl das Präparat in einer Breite von 1 mm im Durchmesser, um dann mittels magnetischer Linse auf der photographischen Platte zu einem feinen Punkt vereinigt zu werden. Die große

¹ Auszug aus der Habilitationsschrift: Neue Anwendungen der Geometrischen Elektronenoptik auf Interferenzprobleme.

² H. Boochs, Ann. Physik (5) 35, 336 [1939].

³ Nature [London] 128, 491 [1931].